

3.4 Couples des variables aléatoires discrètes

Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même univers Ω telles que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$.

3.4.1 Loi conjointe.

Définition 3.4.1 On appelle loi conjointe du couple (X, Y) , toute application

$$\begin{aligned} h: X(\Omega) \times Y(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_i, y_j) &\longmapsto p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) \end{aligned}$$

Remarque 3.4.1 1-La loi de probabilité d'un couple (X, Y) , peut être présentée par le tableau suivant:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	\dots	y_j	\dots	y_m	Loi de X
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1j}	\dots	p_{1m}	$p_{1.}$
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2j}	\dots	p_{2m}	$p_{2.}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_i	p_{i1}	p_{i2}	\dots	p_{ij}	\dots	p_{im}	$p_{i.}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_n	p_{n1}	p_{n2}	\dots	p_{nj}	\dots	p_{nm}	$p_{n.}$
Loi de Y	$p_{.1}$	$p_{.2}$	\dots	$p_{.j}$	\dots	$p_{.m}$	1

2-

- La loi de X est définie par: $p_{i.} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^m p_{ij}$. Elle est appelée la loi marginale de X .
- La loi de Y est obtenue de la même manière: $P(Y = y_j) = p_{.j} = \sum_{i=1}^n p_{ij}$, et elle est appelée aussi la loi marginale de Y .

Application:

Une urne contient 4 boules blanches et deux boules noires. On tire simultanément 2 boules de cette urne.

Soit X la v.a.r qui vaut le nombre de boules noires tirées. Soit Y la v.a.r qui prend comme valeur, le nombre de couleur obtenue dans un tirage.

1- Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

2- Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) et déduire les lois marginales de X , Y et la loi de XY .

3- Calculer $E(X)$, $E(Y)$ et $E(XY)$.

Réponse:

1- On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $Y(\Omega) = \{1, 2\}$.

2-

$X \backslash Y$	1	2	Loi de X
	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
0			
1	0	$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}$
2	$\frac{1}{15}$	0	$\frac{1}{15}$
Loi de Y	$\frac{7}{15}$	$\frac{8}{15}$	1

$x_i y_j$	Loi de XY
0	$\frac{2}{5}$
2	$\frac{3}{5}$

3- On a:

$$E(X) = 0 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{15}$$
$$= \frac{2}{3}$$

$$E(Y) = 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{8}{15}$$
$$= \frac{23}{15}$$

$$E(XY) = 0 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{5}$$
$$= \frac{6}{5}$$

3.4.2 Indépendance entre deux variables aléatoires.

Définition 3.4.2 On dit que X et Y sont Indépendantes si et seulement si :

$$(\forall i \in \{1, ..., n\})(\forall j \in \{1, ..., m\}), P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

En d'autre terme: (les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont Indépendants).

Exemple:

Dans l'application précédente, on a: $P(X = 0, Y = 1) = \frac{2}{5}$, alors que

$$P(X = 0) \times P(Y = 1) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{15}$$
$$= \frac{14}{75}.$$

Cela implique que X et Y sont dépendantes.

3.4.3 Covariance et corrélation.

Lorsque l'on considère deux v.a.r simultanément, il faut définir un indicateur de leur liaison qui complète les paramètres qui les caractérisent chacune séparément (espérance et variance).

Définition 3.4.3

1)- On appelle covariance de X et Y , le réel noté $\text{cov}(X, Y)$, tel que:

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

2)- On appelle corrélation de X et Y , le réel noté $\rho(X, Y)$, tel que:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Propriétés 3.4.1 Si X , Y et Z sont trois v.a.r, alors:

- 1)- $\forall b \in \mathbb{R}, \text{cov}(X, b) = 0$.
- 2)- $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$.
- 3)- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \bullet \text{cov}(aX + Y, Z) = a\text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z).$
 $\bullet V(aX + bY) = a^2V(X) + 2\text{abcov}(X, Y) + b^2V(Y).$
- 4)- $\forall a, b \in \mathbb{R}, V(aX + bY) = a^2V(X) + 2\text{abcov}(X, Y) + b^2V(Y).$
- 5)- $|\text{cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y).$
- 6)- $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1.$

Théorème 3.4.1 Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{cov}(X, Y) = 0$.

Proposition 3.4.1 Si X et Y sont indépendantes, alors:

- $E(XY) = E(X)E(Y).$
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y).$

Remarque 3.4.2 La réciproque du théorème, ainsi de la proposition, n'est pas vraie.

Lois Discrètes Usuelles : Loi de Bernoulli

- Soit E une expérience aléatoire qui a **2 résultats possibles**.
- Soit A l'événement qui nous concerne.
- Soit p la **probabilité de succès** (réalisation de A) et q la probabilité d'échec
- Soit X = « le nombre de succès obtenu dans cette expérience », i.e:

$$X = \begin{cases} 1 & , \text{ Si } A \text{ est réalisé} \\ 0 & , \text{ Si non} \end{cases}$$

Où :

$$\begin{cases} p = p(A) \\ q = 1 - p \end{cases}$$

Lois Discrètes Usuelles : Loi de Bernoulli

X est une variable aléatoire qui suit **la loi de Bernoulli**, noté $B(1,p)$, qui est définie comme suit :

$$P : \{0,1\} \rightarrow [0,1]$$

$$X \rightarrow p(X)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} p(X=1) = p \\ p(X=0) = q = 1-p \end{cases}$$

On écrit $X \rightarrow B(1,p)$

Remarque: Cette expérience aléatoire est appelée l'expérience de **Bernoulli**.

Les propriétés de X sont :

- $E(X) = p$
- $V(X) = p.q = p(1-q)$

Lois Discrètes Usuelles : Loi de Bernoulli

Exemple :

Considérons l'expérience aléatoire suivante : « **Lancement d'un dé** »

On s'intéresse dans cette expérience au numéro de la face inférieure ou égale à 4.

Alors on a:

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A = \{1, 2, 3, 4\}$ est l'événement concerné
- $p = p(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Lois Discrètes Usuelles : Loi de Bernoulli

La variable aléatoire définie par:

$$X = \begin{cases} 1 & , \text{ Si le numéro obtenu est inférieur à 4} \\ 0 & , \text{ Sinon} \end{cases}$$

Suit la loi de Bernoulli $B(1, 2/3)$.

La moyenne et la variance de X sont:

$$E(X) = p = \frac{2}{3}$$

et

$$V(X) = p(1-p) = \frac{2}{9}$$